Physique Générale : Mécanique

02.03: Rappels mathématiques: nombres complexes

Sections GC & SIE , BA1

Dr. J.-P. Hogge

Swiss Plasma Center

École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

- Quelques brefs rappels sur les nombres complexes

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Nombres complexes

Introduits au 16ième siècle pour exprimer les racines d'équations du 3ième et 4ième degré comportant des nombres dont le carré est négatif.

Un nombre complexe est noté $z = x + i\,y$ avec

$i = \sqrt{-1}$

$x = \mathrm{Re}(z)$ Partie réelle

$y = \mathrm{Im}(z)$ Partie imaginaire

Nombres complexes:

- Addition de nombres complexes:

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & x + i\,y \\ u & = & a + i\,b \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad z + u = (x + a) + i\,(y + b)$$

- Multiplication de nombres complexes:

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & x + i\,y \\ u & = & a + i\,b \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad z\,u = (x + i\,y)(a + i\,b) = (xa - yb) + i\,(ya + xb)$$

- Nombre complexe conjugué:

$$z = x + i\,y \quad \Longrightarrow \quad z^* = x - i\,y$$

- Norme (ou module) d'un nombre complexe:

$$z = x + i\,y \quad \Longrightarrow \quad |z|^2 = zz^* = x^2 + y^2$$

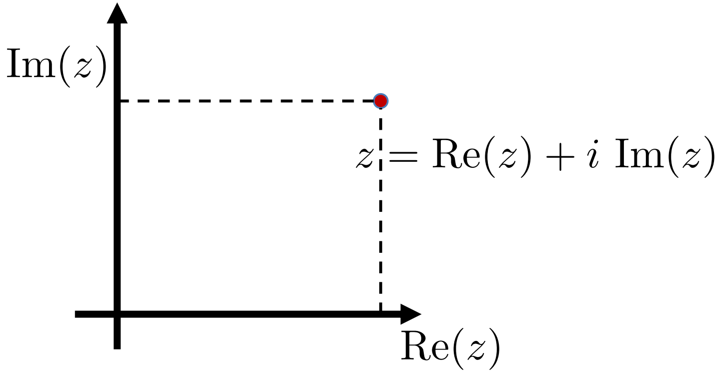
Faculté
des sciences
de base

Swiss
Plasma
Center

- Inverse d'un nombre complexe:

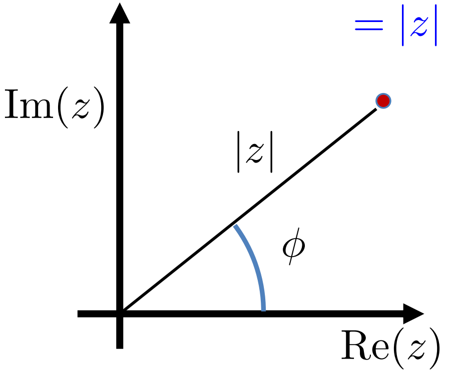
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + i\,y} = \frac{(x - i\,y)}{(x + i\,y)(x - i\,y)} = \frac{(x - i\,y)}{x^2 + y^2} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

- Représentations des nombres complexes:



Cartésienne

$$z = |z| \cos\phi + i\,|z| \sin\phi$$
$$= |z|\,(\cos\phi + i \sin\phi)$$



Polaire

$$\phi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$$

- Faculté des sciences de base
- Swiss Plasma Center

- Formule d'Euler:

$$\boxed{\exp(i\phi) = \cos\phi + i\,\sin\phi}$$

<u>(pseudo-)démonstration:</u>

$$f(\phi) = \frac{\cos\phi + i\,\sin\phi}{\exp(i\phi)}$$

$$\frac{df(\phi)}{d\phi} = \frac{(-\sin\phi + i\,\cos\phi)\exp(i\phi) - i\,(\cos\phi + i\,\sin\phi)\exp(i\phi)}{\exp(2i\phi)} = 0$$

Faculté
des sciences
de base

Swiss
Plasma
Center

- Multiplication de deux nombres complexes

$$\left.\begin{array}{rcl} z & = & |z|\exp(i\phi) \\ u & = & |u|\exp(i\gamma) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad z\,u = |z||u|\exp(i(\phi+\gamma))$$

- Nombre complexe conjugué:

$$\begin{aligned} \exp\{i\phi\}^* &= (\cos\phi + i\,\sin\phi)^* \\ &= \cos\phi - i\,\sin\phi \\ &= \cos(-\phi) + i\,\sin(-\phi) \\ &= \exp\{-i\phi\} \end{aligned}$$

$$z = |z|\exp(i\phi) \quad \Longrightarrow \quad z^* = |z|\exp(-i\phi)$$

- Formule de Moivre

$$(\cos\phi + i\,\sin\phi)^n = \cos n\phi + i\sin n\phi$$

Faculté
des sciences
de base

Swiss
Plasma
Center

- Relations trigonométriques de base:

- $$\cos\phi = \frac{\exp(i\phi) + \exp(-i\phi)}{2} \qquad \sin\phi = \frac{\exp(i\phi) - \exp(-i\phi)}{2i}$$

- $$\cos(2\phi) = \mathrm{Re}(\exp(i2\phi)) = \mathrm{Re}\left((\exp(i\phi))^2\right) = \cos^2\phi - \sin^2\phi$$

- $$\sin(2\phi) = \mathrm{Im}(\exp(i2\phi)) = \mathrm{Im}\left((\exp(i\phi))^2\right) = 2\cos\phi\sin\phi$$

- $$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \mathrm{Re}\left(\exp(i(\alpha \pm \beta))\right) = \mathrm{Re}\left(\exp(i\alpha)\exp(\pm i\beta)\right) \\ \Longrightarrow \quad \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$